1. Une activité locale

1.1. Une proposition

- En 2005 : quatre professeurs *proposent une action de soutien* spécifique[1] pour 2006…
- …avec le soutien du proviseur et de l'IPR régional de mathématiques :

C'est un bon enseignant qui ne regarde pas à sa peine et cherche à mettre les élèves en confiance.
Monsieur ROBIN a monté un projet auquel adhèrent deux professeurs de Français et un de ses collègues de mathématiques pour aider les élèves de Seconde. Sont clairement décrits les objectifs, les méthodes et les moyens d'évaluation. Je souhaite que ce travail prévu dans deux classes de Seconde soit mené à bien l'année prochaine.

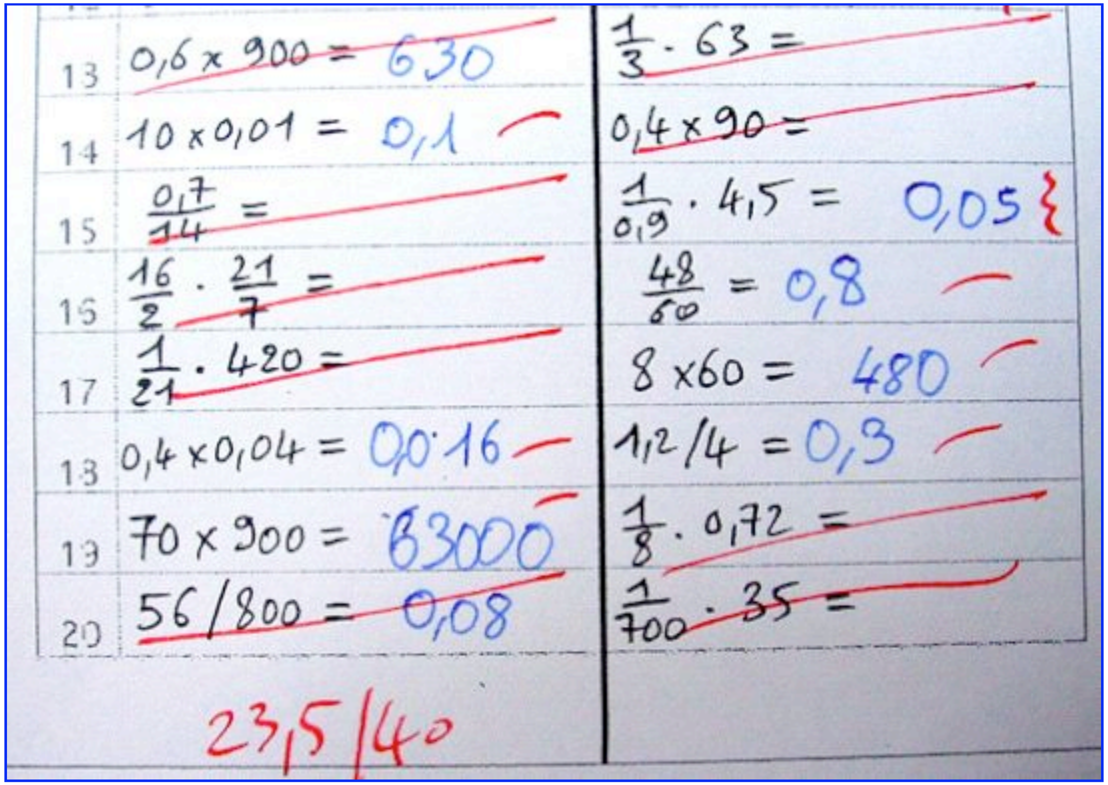
[1] Formation d'Accompagnement Scolaire, prévu le mercredi en début d'après-midi.

1.2. Des difficultés de mise en œuvre

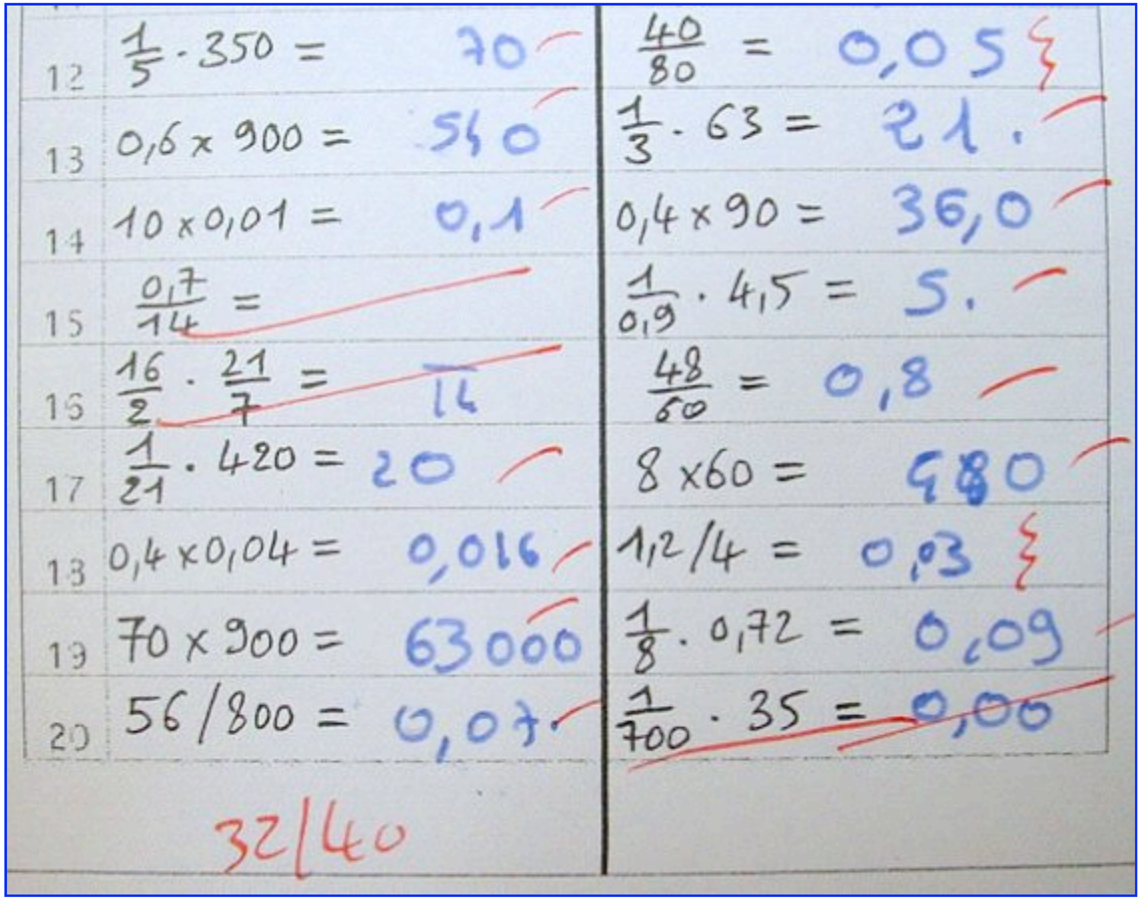
- Le projet dérange : des élèves auraient deux enseignements de mathématiques, parallèles mais de conceptions opposées…
- Un travail le mercredi, s'ajoutant à l'EDT.
- Les élèves de 2de ne perçoivent pas forcément bien le retour aux sources de leurs problèmes…

… Rien n'évolue en 2005-2006.

1.3 Un retour aux sources laborieux



En seconde, novembre 2005 *(copie moyenne)*

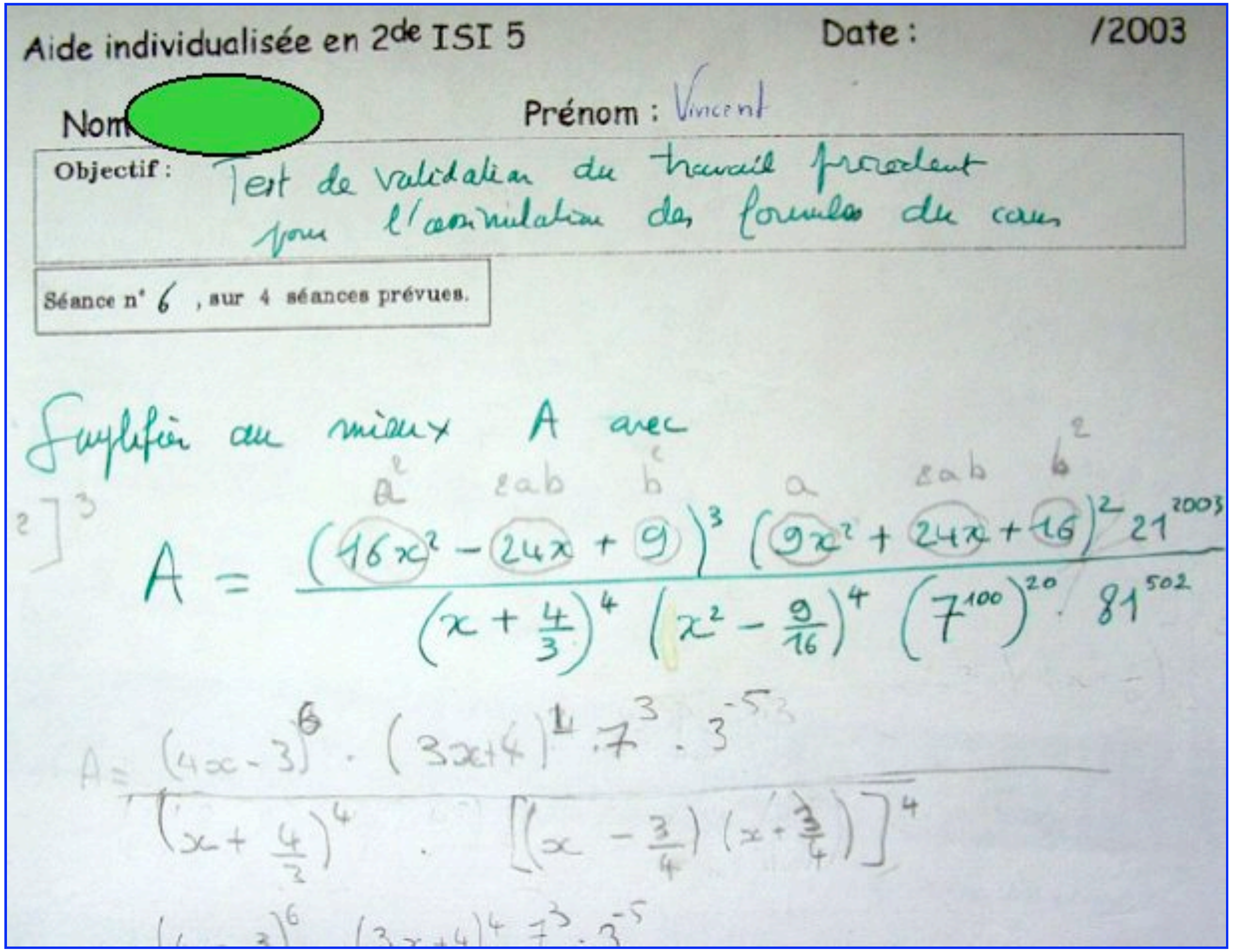


En seconde, novembre 2005 *(bonne copie)*

2. Une pratique ≈SLECC de 5 ans

- Avec du calcul mental et des calculs à la main (simplification de fractions).
- Avec un apprentissage de méthodes durables sur des exercices non stéréotypés.
- Avec des exercices d'application, qu'on apprend à rédiger.

→ rupture nécessaire par rapport à de mauvaises habitudes du collège, très difficile à négocier…



Aide individualisée en 2de ISI 5 — Date : /2003

Nom [redacted] Prénom : Vincent

Objectif : Test de validation du travail précédent pour l'assimilation des formules du cours

Séance n° 6 , sur 4 séances prévues.

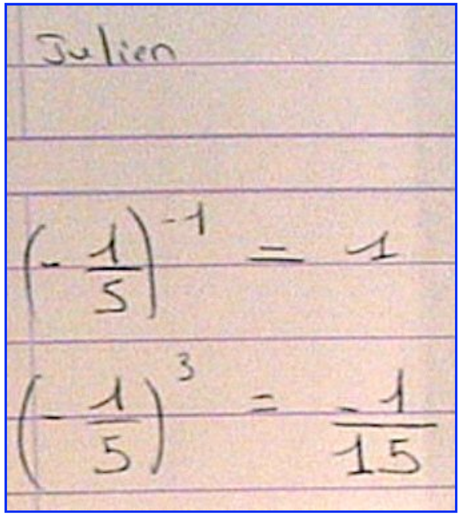
Simplifier au mieux A avec

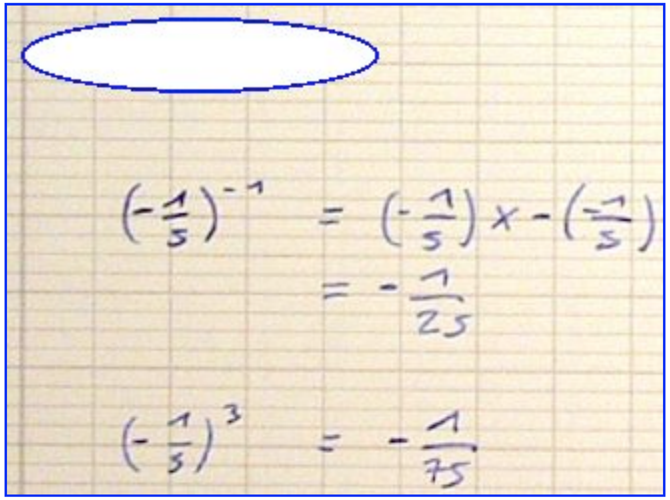
$$A = \frac{(16x^2 - 24x + 9)^3 (9x^2 + 24x + 16)^2 \, 21^{2003}}{\left(x + \frac{4}{3}\right)^4 \left(x^2 - \frac{9}{16}\right)^4 (7^{100})^{20} \cdot 81^{502}}$$

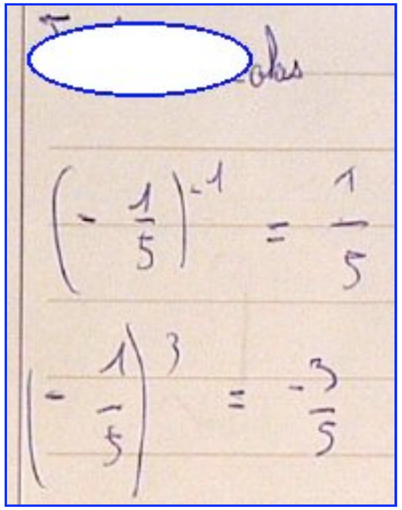
$$A = \frac{(4x-3)^6 \cdot (3x+4)^4 \cdot 7^3 \cdot 3^{-5}}{\left(x + \frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left[\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)\right]^4}$$

$(4x-3)^6 \; (3x+4)^4 \; 7^3 \cdot 3^{-5}$

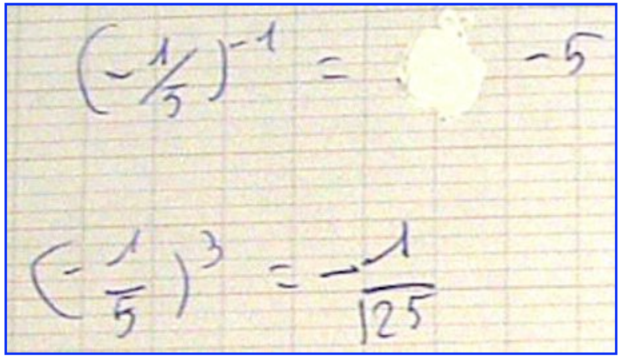
En seconde, novembre 2003 *(validation d'A.I)*

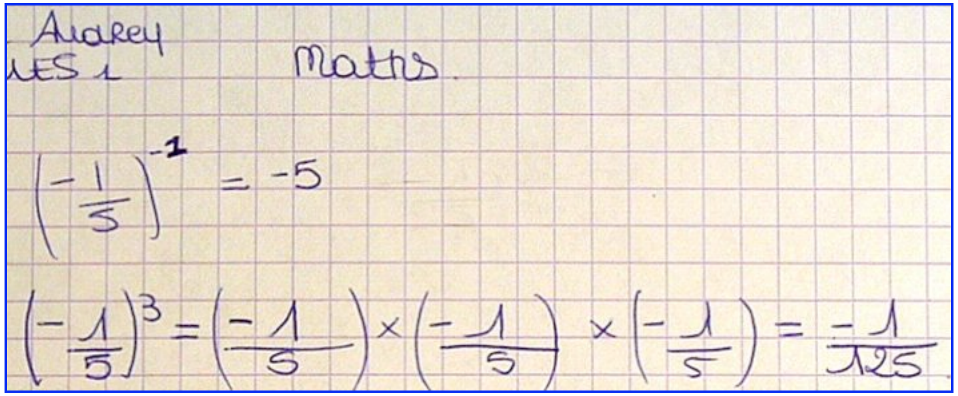






En première ES, en 2005





3. Enseigner sans rupture ?

- Si les sciences ont leurs ruptures, avec des enfantements conceptuels douloureux, l'enseignement doit s'en préserver.
- C'était finalement l'idée de WEIL et d'autres, mais avec manque de communication entre BOURBAKI et les acteurs de l'enseignement élémentaire (primaire et secondaire).

Forme structurée $\not\Rightarrow$ Fond structurant

On peut dire alors

- non à une *structuration ensembliste*, dès le primaire, sans rupture ;
- oui à une *structuration de la pensée mathématique*, dès le primaire, sans rupture ;
- “oui mais” pour une *structuration ensembliste* des cours supérieurs (Physique, etc.).

Le dernier point sort de notre propos…

- Évitons de remettre en question des *savoirs maîtrisés*, en choisissant un enchaînement des notions le plus “naturel” possible.
- Évitons de combattre un “déjà-là” (défini par Bachelard & alii) plus ou moins efficace et difficile à remettre en question…
- …surtout quand on l’a inculqué.

N’est-ce pas le point de départ d’une bonne pédagogie ?

4. Retour aux sources

4.1. Diviser

D'après le Grand ROBERT (2001), c'est :

I. Séparer en parties.

1. Séparer (une chose ou un ensemble de choses) en plusieurs parties. [...] Partager (une quantité) en quantités égales plus petites.

[...]

2. Séparer (un ensemble abstrait, un objet de pensée) en éléments.

Ainsi la division doit être vue primitivement comme un *algorithme* permettant de mettre en évidence des parties *égales*.

- **Exemple 1**

Sept chasseurs-cueilleurs veulent diviser leur récolte de pommes en parts égales.

Ils ne savent pas *dénombrer* mais…

→ à chacun son sac !

→ Diviser n’est pas calculer.

- **Exemple 2**

Sept polytechniciens, récolteurs de pommes, décident à la fin d'un dur labeur, de diviser leur récolte, en parts égales…

→ Ils font comme les chasseurs-cueilleurs : Dieu ne leur dira pas combien il y a de pommes dans le tas.

- **Exemple 3**

Sept élèves de CP, récolteurs de pommes, veulent diviser leur récolte en parts égales…

→ Ils regroupent le plus possible de pommes par paquets de dix (autant que de doigts) ;

→ puis font comme les chasseurs-cueilleurs avec les paquets ; puis avec les pommes restantes.

- **Exemple 3-bis**

Sept élèves de CP, récolteurs de pommes, sachant compter, veulent diviser leur récolte en parts égales...

→ Ils comptent chacun leurs pommes ;

→ Six d'entre eux décomptent jusqu'au plus petit nombre de pommes mémorisé ;

→ puis font comme les chasseurs-cueilleurs avec le petit tas ainsi créé.

- **Conclusion**
  - La division en actes peut être appréhendée avant tout calcul, tout comptage.
  - Les algorithmes de partage en parts égales sont très variables selon le contexte, donc inexploitables en *arithmétique*.
  - Dans les problèmes classiques de partage, soit disant concrets, on oublie trop souvent qu'on doit commencer par *dénombrer*…

$\longrightarrow$ La reproduction d'actes est ici cruciale.

4.2. Multiplier

D'après le Grand ROBERT (2001), c'est :

I. **V. Intr.**

1. **Rare et vx**. Augmenter en nombre.
2. Augmenter en nombre par la reproduction.

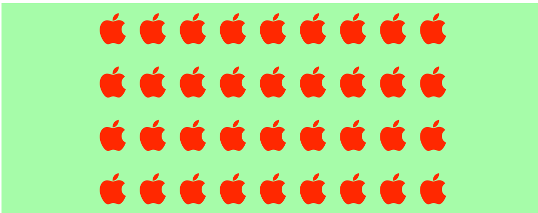
II. **V. Tr.**

1. Rendre plus nombreux.
2. Multiplier (qqch.) par (qqch.) : faire la multiplication de (qqch.) par (qqch.).

- La notion de reproduction à l'identique est essentielle pour l'arithmétique :

"plusieurs fois le même"

- C'est alors un moyen de dénombrer plus efficacement que par comptage direct.

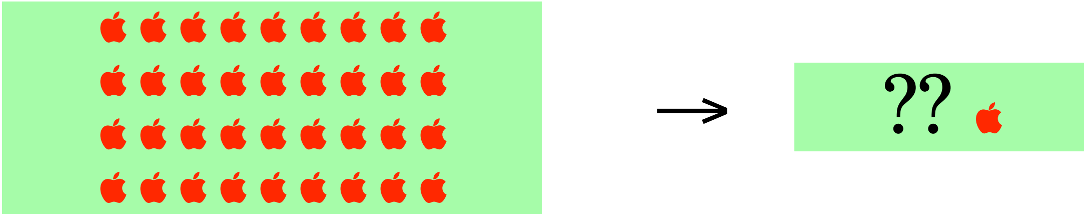


$\longrightarrow \quad 4 \times (9$  $)$

- La reconnaissance du même est donc essentielle en arithmétique : une *sémantique* unique pour plusieurs objets.
- La *numération* décimale entière est une application du principe de dénombrement par paquets.
- La reconnaissance du même est essentielle en mathématiques : générateur de l'*égalité*.

→ même *nombre* de ; même *élément*

• Un algorithme



([2])

$??$ 🍎 $= 4 \times (9$ 🍎$)$

La table ad hoc fournit 36 pour 4×9, d'où :

$(36$ 🍎$) = 4 \times (9$ 🍎$)$

---

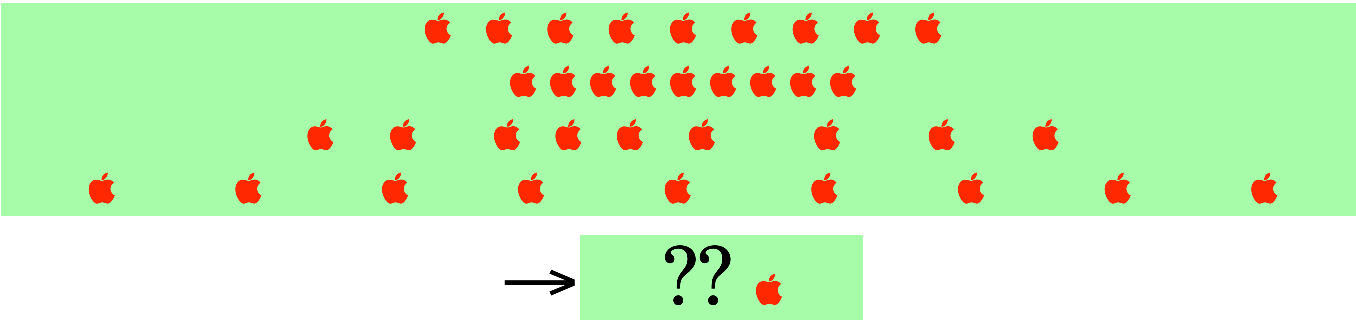
[2] en un regard et un comptage !

• Un autre algorithme

Mais on a aussi :

$$?? = (9) + (9) + (9) + (9)$$

qui ne semble pas ici la meilleure méthode, comme dans le cas suivant :



On note que *quatre fois neuf* n'est pas forcément lié à l'addition…

L'addition est aussi une méthode de dénombrement.

- $\times$ **: une notation de comptage**

Écrire

$$0 + 9 + 9 + 9 + 9 \; = \; 4 \times 9$$

est en fait une notation,

comme lorsqu'on écrit

$$1 \times 7 \times 7 \times 7 \; = \; 7^3$$

lorsqu'on introduit les *puissances* au collège.

4.3. Conclusion

Il semble indispensable d'introduire rapidement (CP) les quatre opérations de l'arithmétique, comme des méthodes de dénombrement. Ensuite viendra le temps (CM1 ?) de résoudre un problème comme suit :

M. Durand a 25 euros dans son porte-monnaie et veut acheter des croissants à 0,65 euro l'unité.

Combien peut-il en acheter au plus ?

Il ne sera alors plus l'heure de partager, mais d'écrire des égalités…

5. Égalité… en arithmétique

- L'égalité est traduite par un symbole (=) au début, trop longtemps, interprété comme indiquant un résultat de calcul (exemple : $14 \times 90 = 1260$).
- Alors qu'une égalité est vraie ou fausse.
- Le mathématicien dit : “On a”, “donc”, “alors”, pour indiquer qu'il va écrire une égalité vraie.

Mais on lit de gauche à droite…

5.1. Rupture dans l'ordre de lecture

L'écriture d'une égalité est souvent chargée d'intention, avec une attente d'action.

Ainsi il en va de l'écriture des calculs en ligne, comme :

$$12 \times (73 + 17) \;=\; \ldots$$

Mais on peut chercher à résoudre un problème générique : *obtenir* une égalité vraie, à partir d'une égalité avec une interrogation.

- **Premiers exemples**

$$
\begin{aligned}
14 \times 90 &= ??\\
14 \times ?? &= 1260\\
?? \times 90 &= 1260\\
14 \times 90 &= ?? \times 20\\
14 \times 90 &= 0{,}21 \times ??
\end{aligned}
$$

C'est un prélude à la résolution d'*équations*, avec une lecture des égalités non nécessairement séquentielle.

Alors on pourra résoudre des problèmes…

5.2. Problèmes en mathématique

- Principe de Pólya :

« Plutôt que de connaître les règles correctes dans leur théorie, on doit les avoir assimilées dans sa chair et dans son sang, prêtes pour un usage instantané et instinctif. »

- L'assimilation est un lent processus car le sens des mots s'épaissit (*nombre* et *unité* en particulier) au fil de leur usage.

- Il est donc impératif de rapidement immerger les notions mathématiques et les calculs dans la résolution de problèmes correspondant à un univers connu des élèves.

- Par exemple, en CM2, le pourcentage de matière grasse dans le camembert, ou de sucre dans le chocolat, ou de (masse de) sel dans l'eau de mer, etc., en auront (sans doute).

En outre, chaque problème est l'occasion de lire et rédiger du français, de faire le lien avec d'autres savoirs.

- **Exemple 4**

M. Durand a 25 euros dans son porte-monnaie et veut acheter des croissants à 0,65 euro l'unité.
Combien peut-il en acheter au plus ?

- **Méthode**

On veut avoir l'égalité ?? $\times$ 0,65 = 25, où ?? …

5.3 Division en mathématique

Ainsi la division arithmétique peut être vue comme un algorithme permettant d'écrire une *égalité* résultant de deux méthodes de dénombrement (direct et indirect) ou de résolution d'un problème :

$$?? \times d_{\text{iviseur}} = D_{\text{ividende}}.$$

Bien entendu, ce problème peut ne pas admettre de solution décimale… et nécessiter la notion de *fraction*.

• Exemple 3-ter

Sept élèves de CP, récolteurs de pommes, sachant compter, veulent diviser leur récolte de 298 pommes en parts égales…

On veut donc résoudre un problème : primitivement

$$(298\ \text{🍎}) \;=\; 7 \times (??\ \text{🍎})$$

ou

$$(298\ \text{🍎}) \;=\; 7 \times (??\ \text{🍎}) + (???\ \text{🍎})$$

plus prudemment…

Un élève de CM1 répondra par l'algorithme de la division posée…

$$\begin{array}{r|l} 298 & 7 \\ \hline -28 & 42 \\ 18 & \\ -14 & \\ 4 & \end{array}$$

Mathématiquement il aura résolu les deux problèmes précédents, avec l'égalité vraie :

$$(298 \text{ 🍎}) = 7 \times (42 \text{ 🍎}) + (4 \text{ 🍎}).$$

L'un d'eux n'a donc pas de solution…

Cette égalité est algébriquement exploitable :

$$(298\ 🍎) = (7 \times 42 + 4)\ 🍎$$

et dans ce décompte, les pommes peuvent alors être remplacées par autre chose :

$$(298_{\ (100 \times 0{,}01)}) = (7 \times 42 + 4)_{\ (100 \times 0{,}01)}$$

D’où l’apparition, en CM2 par exemple, des centièmes comme nouvelle *unité* :

$$(29800 \times 0{,}01) = ((7 \times 42 + 4) \times 100) \times 0{,}01$$

soit $(29800 \times 0{,}01) = (7 \times 4200 + 400) \times 0{,}01$

Et alors on continue :

$$\begin{array}{rrr|l}
4 & 0 & 0 & 7 \\
\hline
-3 & 5 & & 57 \\
\cline{1-2}
 & 5 & 0 & \\
 & -4 & 9 & \\
\cline{2-3}
 & & 1 &
\end{array}$$

soit $400 = 7 \times 57 + 1$ et donc

$$(29800 \times 0{,}01) = (7 \times 4200 + (7 \times 57 + 1)) \times 0{,}01$$

soit finalement

$$(29800 \times 0{,}01) = (7 \times 4257 + 1) \times 0{,}01$$

Mais cette manipulation d'égalités n'est sans doute pas envisageable en CM2. On lui préférera de loin la division posée,

$$
\begin{array}{r|l}
29800 & 7 \\ \hline
-28 & 4257 \\
18 & \\
-14 & \\
40 & \\
-35 & \\
50 & \\
-49 & \\
1 &
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
298{,}00 & 7 \\ \hline
-28 & 42{,}57 \\
18 & \\
-14 & \\
4{,}0 & \\
-3{,}5 & \\
{,}50 & \\
-{,}49 & \\
{,}01 &
\end{array}
$$

correspondant chacune à une égalité...

Les deux égalités

$$29800 = 7 \times 4257 + 1$$

et

$$298{,}00 = 7 \times 42{,}57 + 0{,}01$$

peuvent se déduire algébriquement l'une de l'autre, mais seule la première reste conforme à l'idée de *division euclidienne* des entiers.

Au delà, elle nécessite la notion de dixièmes et de centièmes, partages en 10 parts égales d'une unité fluctuante…

6. Conclusion Finale

(SLECC)' = SL'E'C'C'

Savoir…

- Lire un texte mathématique ;
- Écrire un texte mathématique ;
- Contextualiser les mathématiques ;
- Calculer avec des nombres et des lettres.

Mais quelles mathématiques ?

- Celles d' “avant guerre” (au choix) ?
- Celles d'avant ou d'après 68 ?
- Celles d'après 89 (au siècle près) ?
- Celles de Bourbaki ?
- Celles de Leibniz ?
- Celles qui sont “appliquées”, “utiles” ?
- Celles qui sont “pures” ?
- …

Sont-ce de bonnes questions pour enseigner ?

6.1. Des bases durables

- Les mathématiques de 2006 ne sont qu'un aboutissement de l'évolution humaine, scientifique, mathématique et technique.
- Elles ont évolué au rythme des besoins et des problèmes :

dénombrement → *numérations* → *grandeurs* → *calculs* → *arithmétique* → *mesures* → *géométrie* → *calculs* → *équations* → ...

On peut donc estimer que l'*arithmétique*, au sens des *calculs* avec les quatre *opérateurs* usuels, et la *géométrie élémentaire* forment un socle de base sur lequel reposera tout enseignement de mathématique…

- … qu'il aboutisse sur l'arithmétique modulaire, le calcul tensoriel, et la géométrie riemannienne,
- … ou non.

Alors : Pérennité $\Rightarrow$ continuité

6.2. Ruptures génératrices

- Avec GALILÉE, en partie par la recherche de la loi de la *chute des graves*, la notion de *grandeur* sort du cadre de la *géométrie*.

  → idée de *vitesse instantannée*

- Simon STEVIN, suite à ses *études et recherches en Physique*, enclenche la rationalisation de la *mesure* par la pratique du *calcul décimal* écrit (*La Disme*, 1585).

Les maîtres du calcul “à gets”, étant menacés d’extinction, défendent leurs prérogatives. Mais la rupture sera définitive…

- Le système décimal, défini officiellement le 7 avril 1795, devient obligatoire le 1er janvier 1840 : c’est une rupture des usages.
- Les *unités de mesure* principales (*m*, *g*, *s*) sont alors préfixées par des *symboles multiplicateurs*… algébrisant le calcul usuel.

6.3. Structuration de l'esprit

- Si les sciences ont leurs ruptures, avec des enfantements conceptuels douloureux, l'enseignement efficace doit s'en préserver.
- Il faut donc préparer les jeunes esprits à un mode de pensée mathématique : *égalités*, *algorithmes* et résolution de problèmes doit être leur pain quotidien, du CP à la terminale.
- L'abstraction n'est qu'une conséquence.

Étude de cas

Quelques exercices, en détails,
selon deux approches :
arithmétique pour le primaire
et *algébrique* pour les collège et lycée

1. Un problème de 1908

1.1. Énoncé

(dans le cahier de CM2 de Marie Jagu)

« Un train a des wagons de 3è et de 2è classe et contient 253 voyageurs. Il a produit 5 940 fr pour un trajet de 125 km. Le prix du billet par km est de 0 fr,24 en 2è classe et de 0fr,16 en 3è classe. Combien y a-t-il à bord du train de voyageurs de chaque classe ? »

1.2. Solution à l'ancienne

Prix du billet de 2è classe pour le trajet : 30 fr ;

calcul : $0{,}24 \times 125$

Prix du billet de troisième classe : 20 fr ;

calcul : $0{,}16 \times 125$.

Si tous les voyageurs voyageaient en troisième classe, la recette serait de

$$20 \times 253 = 5060 \text{ fr.}$$

Recette en plus par voyageur de seconde :

10 fr.

Nombre de voyageurs de seconde classe : 88 ;

calculs :

5940 – 5060 = 880 puis 880 / 10 = 88.

Nombre de voyageurs de 3è classe :

253 – 88 = 165.

1.3. Solution arithmétique rédigée

Comme le prix de la seconde classe est de 0,24 fr par km et que le trajet fait 125 km, on peut conclure que le prix du billet de seconde pour le trajet est de :

$$0{,}24 \times 125 \text{ fr, soit } 30 \text{ fr.}$$

Par un calcul similaire ($0{,}16 \times 125$), on obtient le prix du billet de troisième classe : 20 fr.

Si tous les voyageurs voyageaient en troisième classe, la recette serait de

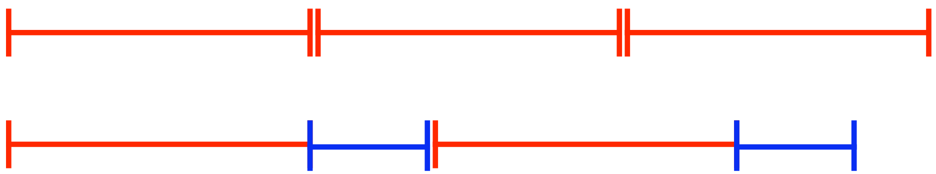
$$20 \times 253 = 5060 \text{ fr.}$$

Comme elle est de 5940 fr, les voyageurs de seconde rapportent en plus 880 fr, et comme chacun d'eux paie 10 fr de plus qu'un voyageur de troisième, ils sont 880 / 10, soit 88. Le nombre de voyageurs de troisième classe est donc de : 253 – 88 = 165.

1.4. Résolution graphique

Voyageurs :

Recette totale en dizaines de francs :



1.5. Algébrisation à une inconnue

Soit s le nombre de voyageurs de seconde classe.

On a $253 - s$ voyageurs de troisième, d'où l'égalité :

$$5940 = 125 \times [s \times 0{,}24 + (253 - s) \times 0{,}16]$$

1.6. Algébrisation à deux inconnues

Soit s le nombre de voyageurs de seconde classe et t celui des voyageurs de troisième classe.

On a les égalités :

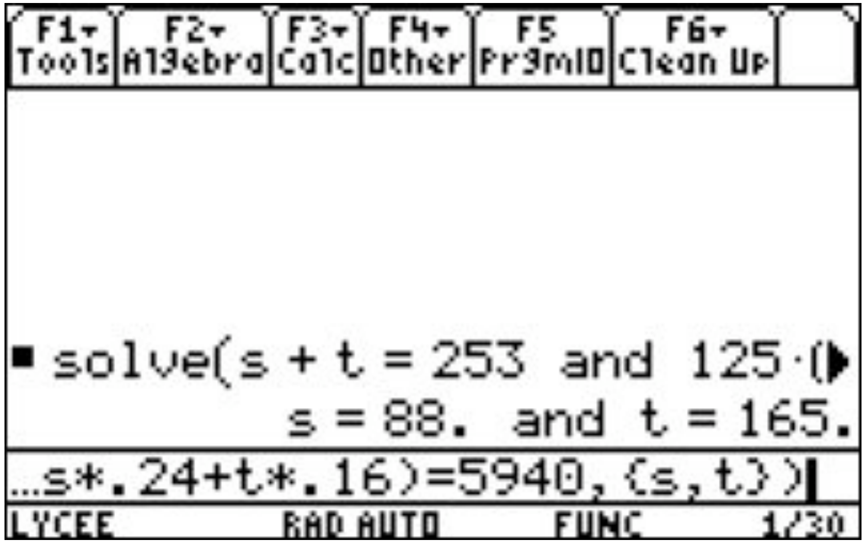
$$s + t = 253$$

et

$$125\,[s \times 0{,}24 + t \times 0{,}16] = 5940$$

1.7. Résolution outillée

Sur TI 89 Titanium :



Faisable aussi en 2006 sur une simple CASIO collège 2D...

1.8. Résolution manuelle

Le système s'écrit donc aussi :

$$s + t \;=\; 253 \quad \text{et} \quad 30\,s + 20\,t \;=\; 5940$$

Puisque $t = 253 - s$, on a donc

$$30\,s + 20\cdot(253 - s) \;=\; 5940$$

c'est à dire

$$30\,s + 20 \cdot 253 - 20\,s = 5940$$

ou encore

$$10\,s + 5060 = 5940.$$

Par suite on a :

$$10\,s = 5940 - 5060 \quad \text{soit} \quad 10\,s = 880$$

d'où

$$s = 880 \,/\, 10 = 88\ ;$$

et donc

$$t = 253 - 88 = 165.$$

1.9. Performances des élèves de l'an 2000 + X

- **BTS-Industriel, 1ère année (donc bacheliers)**

Dix-sept étudiants de BTS électrotechnique ; résolution sans calculatrice.

Cinq étudiants l'ont résolu par la méthode algébrique. Le plus rapide en dix minutes, les quatre autres en 20 ou 25 minutes. Ils ont justifié leur lenteur par la difficulté à effectuer à la main les calculs préalables indispensables[3] : $125 \cdot 0{,}24 = 30$ et $125 \cdot 0{,}16 = 20$.

Les 12 autres ont jeté l'éponge après 30 minutes. Leurs copies révèlent des défauts de raisonnement (ex. : 5940 fr / 30 fr = 198 voyageurs de seconde classe, d'où 55 voyageurs de troisième), mais aussi d'étonnantes erreurs de calcul : cinq d'entre eux trouvent que $0{,}24 \cdot 125 = 31{,}25$! ([4])

[3] Autrement dit les meilleurs nont pas su faire de tête une multiplication par 5/4 (125 = 100 · 5 /4) qui était à la portée d'un élève de CM autrefois.

[4] que dire de celui qui sans faire aucun calcul écrit au bout d'une demi-heure de réflexion : Voyageurs de troisième classe : 160, Voyageurs de 2è classe : 47 Où peuvent être passés les 46 voyageurs manquants ?

- **Terminale STT ("STG" en 2006 !)**

Le problème avait été actualisé pour éliminer une éventuelle gêne dûe au caractère désuet des informations de l'énoncé :

« Un train a des wagons de 1è et de 2è classe et contient 253 voyageurs. Il a produit 4455 euros pour un trajet de 125 km. Le prix du billet par km est de 0,18 euro en 1è classe et de 0,12 euro en 2è classe. Combien y a-t-il à bord du train de voyageurs de chaque classe ? »

Conditions de travail : dictée de l'énoncé aux 27 élèves de la classe (5 min), puis 15 min pour la recherche d'une solution rédigée succinctement.

- 15 élèves n'ont pas fait mieux que donner le prix du billet de chaque classe ;
- 9 élèves ont bien commencé à poser une ou deux équations, mais fausses dans la plupart des cas, sans savoir en tirer profit ;

- 1 élève a posé les bonnes équations, mais n'a pas pu résoudre le système (erreur de calcul) ;

- Seulement 2 élèves ont résolu le problème correctement.

2. Un problème de 1969

2.1. Énoncé (cahier de CM2 de L.R)

« Trois enfants pèsent ensemble 96 kg. Le second pèse 4 kg de plus que le premier et le troisième deux fois plus que le second.

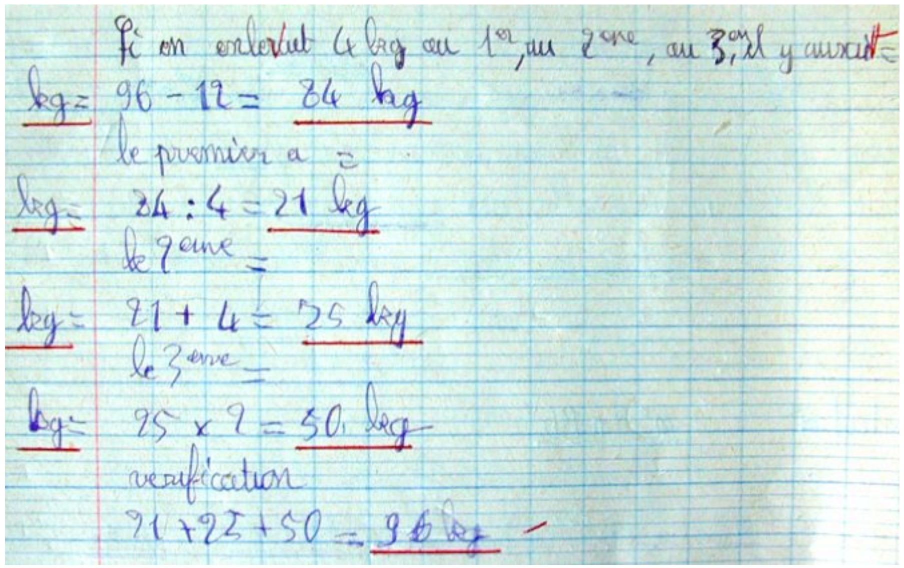
Déterminer le poids de chacun des trois enfants. »

2.2. Solution de l'élève de CM2

1. 

2. 

3. 



Si on enlevait 4 kg au 1er, au 2ème, au 3ème il y aurait =
kg = 96 − 12 = 84 kg
le premier a =
kg = 84 : 4 = 21 kg
le 2ème =
kg = 21 + 4 = 25 kg
le 3ème =
kg = 25 x 2 = 50 kg
vérification
21 + 25 + 50 = 96 kg

2.3. Algébrisation à une inconnue

Soit p le poids de l'enfant le plus léger. On a :

$$96 = p + (p + 4) + 2\,(p + 4)$$

2.4. Résolution manuelle

L'équation précédente équivaut à :

$$96 = 4\,p + 12$$

ce qui équivaut à :

$$(96 - 12) / 4 = p$$

D'où $p = 21$.

2.5. Performances des élèves de l'an 2000 + X

- Aucun élève testé (de la Seconde au BTS) ne sait résoudre le problème arithmétiquement avec un dessin, comme au § 2.2.
- Moins de 20 % des élèves à l'entrée en Seconde arrivent à le résoudre algébriquement.

Affaire à suivre...