Nombres au cours préparatoire

Prenons comme exemple concret : dresser le couvert pour n personnes, compter les assiettes, les couteaux, ... ceci donne une première idée de nombre abstrait : la quantité, ce qui est commun à 3 personnes, 3 assiettes, etc.
On peut représenter les 3 assiettes par des objets quelconques pour jouer.
Comment former de nouveaux nombres: en ajoutant 1, donc la notion d'addition coexiste avec la construction des nombres. Nombre écrit en chiffres et en lettres.
La notion de nombres est indépendante de la façon dont on les nomme ou écrit.
La comptine des nombres au moins jusqu'à vingt, à l'endroit et à l'envers. Compter sur ses doigts : Digitis rationem computare. Dix à cause des deux mains.
Les chiffres sont les caractères d'écriture, un nombre s'écrit avec un ou plusieurs chiffres comme un mot s'écrit avec une ou plusieurs lettres.

Numération de position
Quand on arrive à dix, on forme un premier groupement, la dizaine, dix s'écrit 10, 1 dizaine et 0 unité. Concrètement, attacher ensemble 10 bâtonnets (du genre coton-tige), boutons, rondelles ; jeux de cubes, barres, (plaques).
Table d'addition des nombres de 1 à 9, à savoir par coeur après avoir longuement compté sur ses doigts et avec des objets :
Vocabulaire : ajouter, additionner ; le signe +, les nombres que l'on ajoute sont les termes de l'addition, le résultat est le total ou la somme ; le signe = qui sépare l'opération de son résultat.
Additionner sur ses doigts, exemple 8 + 5 : à partir de 8, on compte 9, 10, 11, 12, 13 on est arrivé à 13 donc la somme est 13 (donc il faut savoir par coeur la liste des nombres), exercices oraux.
Remarque : commutativité de l'addition, il est plus facile en comptant sur ses doigts d'additionner 8 + 5 que 5 + 8, mais il faut faire vérifier sur plusieurs exemples qu'on trouve le même résultat, ce qui justifie le changement d'ordre des nombres si on change.

Compter de 10 à 20.
Faire remarquer que chaque fois qu'on ajoute 1, seul le chiffre des unités change, jusqu'à 19.
On écrit les unités simples au premier rang à droite, puis les dizaines au deuxième rang.
Vocabulaire : observer les irrégularités de onze, douze, ... seize, et vingt, dues à l'héritage du latin.
Après, la formation est régulière : vingt et un, vingt deux, ...
Compter les dizaines comme on compte les unités : quatre dizaines, c'est quatre paquets de dix bâtonnets.
Vocabulaire des dizaines : trente, quarante, cinquante, soixante inspirés des racines trois, quatre, etc., puis les irrégularités françaises.
Pour lire ou écrire un nombre entre dix et cent, on lit ou écrit d'abord les dizaines puis les unités.

Comparaison des nombres entiers : nécessaire pour tout ce qui suit.
Si les deux nombres n'ont pas la même quantité de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de

chiffres.
S'ils ont la même quantité de chiffres, on compare chiffre à chiffre à partir de la gauche ; quand on a trouvé un chiffre différent, le nombre le plus grand est celui qui au n-ième rang a le chiffre le plus grand ; on n'examine pas les chiffres suivants.
Exemple 30 et 19.
Pour les nombres décimaux, on opérera de même, en écrivant superposés les nombres rang par rang.
Exemple : 2,45 et 2,408.
En fait, la règle est la même pour tous les cas, en s'obligeant à respecter les rangs.

On ne peut additionner ou soustraire que des nombres comptant des objets de même nature.

Additions de nombres à deux chiffres, d'abord sans retenue. Manipuler avec des bâtonnets et des paquets, ou des petits cubes et barres : exemple 35 + 14. On additionne séparément les unités et les dizaines.
Avec retenue : exemple 35 + 8. Jouer avec des bâtonnets ou cubes. 5 unités plus 8 unités font 13 unités. On convertit dix de ces unités en une dizaine, il reste 3 unités (soustraction faite mentalement ou en comptant les objets). Remarque sur l'écriture : 1 dizaine et 3 unités. On ajoute la dizaine aux 3 de 35, on obtient 4 dizaines. Résultat : 4 dizaines et 3 unités, donc 43.
35 + 28. Mêmes opérations : additionner séparément les unités et les dizaines, puis transformer 13 en 1 dizaine et 3 unités.
Addition de 3 nombres, disposition en colonnes pour faire fonctionner l'associativité : les unités ensemble, avec report éventuel, les dizaines ensemble.

Soustraction : opération inverse de l'addition ; signe -. Manipuler avec de petites quantités d'objets, par exemple les doigts. 10 – 4 : on lève les deux mains, et on baisse 4 doigts, on compte ceux qui restent ; ou : on lève les deux mains, on compte à l'envers 10, 9, 8, 7 ; le nombre précédent est 6, donc le résultat est 6 ; ou bien : je commence à compter à 9 : 9, 8, 7, 6 ; le résultat est 6. Donc il faut connaître la comptine à l'envers.
Manipuler avec des bâtonnets, des cubes, etc.
Vocabulaire : soustraire, enlever, ôter ; les termes de la soustraction, le résultat est la différence ou le reste.
La soustraction n'est pas commutative ; tant qu'on opère avec des nombres entiers naturels, on ne peut pas soustraire un grand nombre d'un plus petit.
Soustractions sans retenue si à chaque rang le chiffre du deuxième nombre est inférieur à celui du premier nombre. Faire manipuler pour se persuader qu'il n'y a pas de difficulté : on soustrait à chaque rang. Exemple 37 – 12.
Sinon :
exemple 35 – 8 ; on peut compter à reculons parce que 8 est petit, et pour comparer on va faire l'opération chiffre à chiffre. On ne peut pas soustraire 8 de 5, donc il faut transformer une dizaine en dix unités que l'on ajoute à 5, ce qui fait 15, et il reste seulement 2 dizaines. 15 unités moins 8

unités, il reste 7 unités. En tout la différence est 2 dizaines et 7 unités soit 27.
35 – 18 :
Manipuler et écrire au tableau en même temps.
changer une dizaine en 10 unités à ajouter aux 5 ; il reste 2 dizaines ;
15 unités moins 8 unités, il reste 7 unités ;
2 dizaines moins 1 dizaine, il reste 1 dizaine.
Résultat : 1 dizaine et 7 unités, soit 17.
Comparer avec la soustraction précédente, il faut les laisser toutes les deux au tableau.

Cas particulier (et commode) de soustraction : rendre la monnaie. On complète le prix de l'article acheté jusqu'à ce qu'on arrive au montant du billet donné. L'expérience montre qu'on fait beaucoup moins d'erreurs par cette addition à trous.
Se procurer les billets d'un jeu de monopoly ?
Calcul mental en grande quantité.

Poursuite de la construction des nombres : la centaine.

Multiplication.
On peut commencer par définir la multiplication comme une addition réitérée : 5 + 5 + 5, dans ce cas le résultat est une grandeur de la même nature : 5 cubes + 5 cubes + 5 cubes = 15 cubes ; on convient d'écrire : 5 cubes × 3 = 15 cubes. Multiplicande, multiplicateur, signe × ; opération externe, non commutative, dans ce cas. Le résultat est le produit, qui ici est dans la même unité que le multiplicande, car le multiplicateur n'est que la quantité de termes de l'addition réitérée.
L'expression « multiple de ... ».

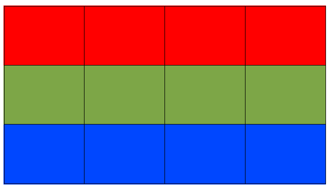
Tables de multiplication, à apprendre dans l'ordre de difficulté : 2 (avec repérage et définition des nombres pairs : multiples de 2, le chiffre des unités est pair, et par complément les nombres impairs), 5 (le chiffre des unités est alternativement 5 ou 0), 9 (remarquer que la somme des chiffres est 9, que les dizaines croissent de 1 tandis que les unités décroissent de 1 : normal, ajouter 9 c'est ajouter 10 et soustraire 1 ; le chiffre des dizaines est le précédent du multiplicateur), 3 (si un nombre est multiple de 3, la somme de ses chiffres est 3, 6 ou 9), 4, 6, 8 (produits nécessairement pairs ; utiliser le fait que les multiples de 6 sont des multiples de 3, donc la somme des chiffres est 3, 6, ou 9) ; 7 (pas de remarques utiles, hélas, c'est pourquoi elle est la plus difficile à retenir).
Pour toutes les tables, il faut aussi définir la suite des résultats comme une suite arithmétique : chaque produit est la somme du précédent et de la raison de la suite : le nombre dont on fait la table : exemple
7 × 5 = 35
7 × 6 = 42 = 35 + 7
7 × 7 = 49 = 42 + 7
Faire beaucoup d'exercices de calcul mental ; réciter les tables à l'endroit, à l'envers, interrogations au hasard.

Faire remarquer la distributivité et la factorisation liant la multiplication et l'addition, par exemple la somme de multiples d'un nombre a est un multiple de ce nombre a. Utilisé comme moyen de vérification en calcul mental, et comme justification théorique de la disposition en colonnes des opérations partielles de la multiplication et de la division.

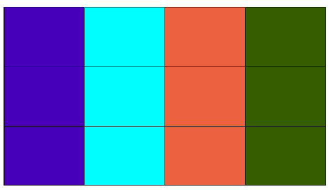
Multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre : manipuler avec cubes et barres, addition réitérée ; faire les transformations. Exemple : 37×4.
7 unités $\times$ 4 = 28 unités parce qu'on a appris la table. 28 unités = 2 dizaines et 8 unités.
3 dizaines $\times$ 4 = 12 dizaines = 1 centaine et 2 dizaines.
On récapitule : 1 centaine ; 2 dizaines et 2 dizaines = 4 dizaines ; 8 unités. Soit 148.
Posons la multiplication

c	d	u
	3	**7**
$\times$		**4**
	2	8
1	2	
1	4	8

Tant qu'on opère avec des nombres entiers, on peut toujours définir la multiplication comme addition réitérée.
Il faut aussi introduire la multiplication liée au calcul des aires, dont les deux facteurs ont le même rôle (la même dimension) et le résultat est d'une nature différente de celle des facteurs car la dimension change. Illustrons par un schéma : 3×4



4×3



La multiplication est ici commutative, et si l'on considère les unités c'est une opération externe, contrairement à l'addition et la soustraction qui sont des opérations internes : les deux termes opérés entre eux et le résultat étaient tous de même nature.
Il est recommandé de traiter cette forme de la multiplication en même temps que dans le système métrique la définition de l'aire du rectangle et des unités d'aire : le mètre carré.
Table de Pythagore :

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Remarques sur la symétrie par rapport à la diagonale (commutativité), d'où on déduit qu'il manque certainement des nombres entre 1 et 100. Eventuellement étudier la symétrie des chiffres des unités dans la diagonale, liste des carrés ; conséquence : les carrés ont pour chiffre des unités 0,1,4,9,6,5 ; mais pas les autres chiffres.

Poursuite de la numération : jusqu'à mille ; les milliers.

Multiplication de deux nombres à deux chiffres.
$10 < a < 100$ et $10 < b < 100$ donc $100 < ab < 10\,000$, le produit s'écrira avec 3 ou 4 chiffres.
Exemple : 85×34. Comment on pose la multiplication et pourquoi ; les produits partiels.
En détaillant tout et en utilisant l'associativité et la commutativité :

		8	**5**
	×	**3**	**4**
		2	0
	3	2	
	1	5	
2	4		
2	8	9	0

4×5 unités = 20 unités = 2 dizaines et 0 unité.
4×8 dizaines = 32 dizaines = 3 centaines et 2 dizaines.
30×5 unités = $(3 \times 10) \times 5$ unités = $(3 \times 5) \times 10$ = 15 dizaines = 1 centaine et 5 dizaines.
30×8 dizaines = $(3 \times 10) \times 8 \times 10 = (3 \times 8) \times (10 \times 10)$ = 24 centaines = 2 milliers et 4 centaines.
Puis la somme des produits partiels, qui est le produit.

Si on détaille moins :

$\begin{array}{rrrr} & & \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ & \times & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & \\ \hline 2 & 8 & 9 & 0 \end{array}$	$4 \times 5 = 20$, j'écris 0 unités et je retiens 2 dizaines ; 4×8 dizaines = 32 dizaines, plus 2 dizaines, c'est 34 dizaines ; plus 0 unité, donc 340 unités. $30 \times 85 = (3 \times 10) \times 85 = (3 \times 85) \times 10 = 3 \times 85$ dizaines, donc **l'opération commence au rang des dizaines** ; ceci étant dit : $3 \times 5 = 15$, j'écris 5 (dizaines) et je retiens 1 centaine ; $3 \times 8 \times (10 \times 10) = 24$ centaines ; plus 1 centaine = 25 centaines, ou 250 dizaines ; plus 5 dizaines, donc 255 dizaines.

Division. Avec de petits nombres, on peut commencer très tôt, en jouant avec des cubes, bâtonnets, etc, la division est un partage.
12 oranges à partager entre 3 enfants : on donne déjà 1 à chacun, il en reste 9, donc on peut continuer la distribution ; encore 1 à chacun, qui en a maintenant 2, il en reste 6 ; puis encore deux fois, il n'en reste plus. Jouer à la distribution, dessiner, écrire l'opération sous la forme habituelle, que l'on pense avec la table de multiplication : 12 divisé par 3, c'est 4 parce que $4 \times 3 = 12$; il reste 0. Vocabulaire : dividende, diviseur, quotient, reste. La division n'est pas commutative, ni associative.
Calcul mental longuement pratiqué, division comme inverse de la multiplication.
On a vu que la table de Pythagore ne contient pas tous les nombres, donc il existe certainement des nombres inférieurs à 100 et non divisibles par les nombres de 2 à 10 : définition de 'divisible'.
Caractères de divisibilité : ils reprennent les remarques sur la multiplication. Par 2, 5, 9, 3.
Prendre un nombre entre 10 et 100 au hasard comme dividende, un nombre entre 2 et 10 comme diviseur, et faire le partage avec barres et cubes, ou paquets et bâtonnets.
Premier exemple : 57 divisé par 8. Remarques préalables : $57 < 80$, donc le quotient n'a qu'un chiffre ; 57 impair, donc évidemment non divisible par 8, nombre pair (il faut habituer les élèves à trouver vite ce genre d'évidences).
On passe en revue mentalement la table de 8 : $8 \times 6 = 48$; $8 \times 7 = 56$, juste avant 57 ; $8 \times 8 = 64$, trop grand. Donc le quotient est 7, et le reste est 1.
Remarque : pour faire une division on doit savoir faire les trois autres opérations. Le reste doit être inférieur au diviseur, sinon c'est qu'on a choisi un quotient trop petit. Ici par exemple on doit distribuer 57 billes à 8 enfants, si on en a donné à chacun 6, il en reste encore $57 – 48 = 9$, on peut encore distribuer une bille à chacun.
Deuxième exemple : 67 divisé par 5 ; $67 > 50$, donc le quotient va s'écrire avec 2 chiffres.
Manipulation avec barres et cubes, 6 barres et 7 cubes, à distribuer à 5 enfants ; ni 6 ni 7 ne sont divisibles par 5.
On donne déjà 1 barre à chacun ;
il en reste 1, qu'il faut convertir en 10 cubes, ajoutés aux 7, cela fait 17 cubes ; on peut distribuer 3 cubes à chacun des 5 enfants, $5 \times 3 = 15$, il en restera $17 – 15 = 2$, et $2 < 5$ donc on ne peut plus distribuer.
Chaque enfant a reçu 1 barre et 3 cubes, soit 13 cubes, et il en reste 2.

On écrit la division

$$\begin{array}{rr|rr} 6 & 7 & 5 & \\ \hline 1 & 7 & 1 & 3 \\ & 2 & & \end{array}$$

Division par un nombre à deux chiffres.
On ne peut plus se contenter du recours à la table de multiplication, et les manipulations deviennent difficiles.
Estimation du nombre de chiffres du quotient de *a* par *b* : selon que le dividende *a* est compris dans l'un ou l'autre des intervalles [*b* ; 10*b*], [10*b* ; 100*b*], etc.
Exemple : 327 divisé par 12 ; 120 < 327 < 1200, donc le quotient aura 2 chiffres. Calcul mental approché à faire systématiquement.

$$\begin{array}{rrr|rr} C & D & U & & \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 4 & & 2 & 7 \\ & 8 & 7 & & \\ & -8 & 4 & & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rr} C & D & U & & \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ \hline & 8 & 7 & 2 & 7 \\ & & 3 & & \end{array}$$

Le premier chiffre du quotient est fourni par 32 (32 dizaines). En comparant 3 et 1, on essaie 3 ; $3 \times 12 = 36$, trop grand, on prend 2 (2 dizaines); $2 \times 12 = 24$ dizaines, 24 < 32, donc convient. On soustrait 24 de 32, il reste 8 dizaines. On convertit 8 dizaines en 80 unités, auxquelles on ajoute les 7 unités du dividende (on dit qu'on abaisse le 7).
Le deuxième chiffre du quotient est donné par ce dividende partiel 87. On essaie 8, $8 \times 12 = 96$, trop grand, on prend 7 ; $7 \times 12 = 84$; 84 < 87, convient ; 84 ôté de 87, il reste 3.

Les fractions : dès le CP on peut étudier les fractions simples comme ½, ¼, qui sont d'usage concret courant. Vocabulaire : un demi = la moitié, le tiers, le quart (irrégularités de ces mots par rapport aux nombres deux, trois, quatre, dues au latin).
Avec le système métrique, les divisions du mètre, on peut introduire simultanément les nombres décimaux et les fractions décimales, exemple 1 décimètre = 0,1 mètre = 1/10 mètre. Voir les tableaux du système métrique dans le cours élémentaire de Royer et Court,
http://r-lecole.freesurf.fr/l-anc/anc.html
et plus précisément à partir du cours du mois de novembre,
http://r-lecole.freesurf.fr/l-anc/MaCEnov.pdf
Faut-il parler des fractions autres que ½, ¼, et les fractions décimales ? Pas au début.
Vocabulaire : numérateur, dénominateur.
La fraction a/b représente un nombre rationnel, quotient exact des 2 nombres a et b, qui existe même si a n'est pas divisible par b, même si la division ne se termine pas.

Introduction des nombres décimaux par la mesure ; système métrique. Explications et tableau du système métrique.

multiples			unité	sous-multiples		
kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Opérations avec les nombres décimaux : addition, soustraction justifiées par les changements d'unités pour se ramener à des nombres entiers.
Exemple :

2,45 m + 3,8 m = 245 cm + 380 cm

unités	dixièmes	centièmes
2,	4	5
3,	8	0
6,	2	5

La multiplication est justifiée aussi par les changements d'unités. Exemple :
en supposant que l'on a défini le centimètre carré, le décimètre carré, etc. avec des dessins de quadrillage pour expliquer les conversions, on se propose de calculer l'aire d'un rectangle de 4,5 m sur 3 m. On convertit les longueurs en dm, donc l'aire sera exprimée en dm².

4,5 m × 3 m = 45 dm × 30 dm = 1350 dm² = 13,5 m²

Puis 4,5 m × 3,7 m = 45 dm × 37 dm = 1665 dm² = 16,65 m²
Règle de la place de la virgule dans le produit : il y a autant de chiffres décimaux dans le produit que dans les deux facteurs.
(Il faudra faire attention si le dernier chiffre est un 0, de ne pas l'omettre dans ce décompte, par exemple pour calculer 4,5 m × 3,2 m = 45 dm × 32 dm = 1440 dm² = 14,40 m²)

Multiplication des fractions.
Exemple : 4/5 × 2/3

////	////	////	////	
////	////	////	////	

Le tableau comporte 5 × 3 = 15 cases. 4 colonnes sur 5 sont colorées, et dans celles-ci 2 lignes sur 3 sont rayées. Les 2/3 des 4/5 des cases sont 8 sur 15, ce qui s'écrit

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

Pour multiplier les fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Mais on peut dans certains cas simplifier :
soit $2/3 \times 3/4$:

XXX	XXX	
XXX	XXX	
XXX	XXX	

Le tableau comporte $3 \times 4 = 12$ cases, et de celles-ci on a $2 \times 3 = 6$ qui sont colorées et barrées. Or, 6 est la moitié de 12, donc le produit 6/12 se simplifie en ½.
Mais il vaut mieux simplifier avant : les deux nombres 3, d'une part, et 2 et 4 divisibles par 2 :

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$$

$$= \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{1 \times 1}{1 \times 2}$$

La multiplication des nombres décimaux telle qu'elle a été définie plus haut est cohérente avec la multiplication des fractions ci-dessus, aisément représentables par un quadrillage qui peut illustrer aussi bien le mètre carré découpé en décimètres carrés :

$$0{,}7 \quad \times \quad 0{,}3 \quad = \quad 0{,}21$$

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

21 petits carrés sur 100 sont colorés et barrés :

/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
/	/	/	/	/	/	/	/	/	/